**Лабораторная работа 9.**

**Понятие об игровых моделях.**

На практике часто приходится сталкиваться с задачами, в которых необходимо принимать решения в условиях неопределенности, т.е. возникают ситуации, в которых две (или более) стороны преследуют различные цели, а результаты любого действия каждой из сторон зависят от мероприятий партнера. Такие ситуации, возникающие при игре в шахматы, шашки, домино и т.д., относятся к конфликтным: ***результат каждого хода игрока зависит от ответного хода противника, цель игры — выигрыш одного из партнеров***.

В экономике конфликтные ситуации встречаются очень часто и имеют многообразный характер. К ним относятся, например, взаимоотношения между поставщиком и потребителем, покупателем и продавцом, банком и клиентом. Во всех этих примерах конфликтная ситуация порождается различием интересов партнеров и стремлением каждого из них принимать оптимальные решения, которые реализуют поставленные цели в наибольшей степени.

При этом каждому приходится считаться не только со своими целями, но и с целями партнера, и учитывать неизвестные заранее решения, которые эти партнеры будут принимать. Для грамотного решения задач с конфликтными ситуациями необходимы научно обоснованные методы. Такие методы разработаны, математической теорией конфликтных ситуаций, которая носит название **теория игр**.

Ознакомимся с основными понятиями теории игр. Математическая модель конфликтной ситуации называется ***игрой***, стороны, участвующие в конфликте, — ***игроками***, а исход конфликта — ***выигрышем***.

Для каждой формализованной игры вводятся правила, т.е. система условий, определяющая:

1. варианты действий игроков;
2. объем информации каждого игрока о поведении партнеров;
3. выигрыш, к которому приводит каждая совокупность действий.

Как правило, выигрыш (или проигрыш) может быть задан количественно; например, можно оценить проигрыш нулем, выигрыш — *единицей*, а ничью — *1/2*.

Игра называется **парной**, если в ней участвуют два игрока, и **множественной**, если число игроков больше двух. Мы будем рассматривать только парные игры. В них участвуют два игрока ***А*** и ***В***, интересы которых противоположны, а под игрой будем понимать ряд действий со стороны ***А*** и ***В***. Игра называется **игрой с нулевой суммой**, или **антагонистической**, если выигрыш одного из игроков равен проигрышу другого, т.е. для полного задания игры достаточно указать величину одного из них. Если обозначить ***а*** — выигрыш одного из игроков, ***b*** — выигрыш другого, то для игры с нулевой суммой ***b = - а***, поэтому достаточно рассматривать, например ***а***.

Выбор и осуществление одного из предусмотренных правилами действий называется ***ходом*** игрока. Ходы могут быть личными и случайными. ***Личный ход*** — это сознательный выбор игроком одного из возможных действий (например, ход в шахматной игре). ***Случайный ход*** — это случайно выбранное действие (например, выбор карты из перетасованной колоды). В дальнейшем мы будем рассматривать только личные ходы игроков. ***Стратегией*** игрока называется совокупность правил, определяющих выбор его действия при каждом личном ходе в зависимости от сложившейся ситуации. Обычно в процессе игры при каждом личном ходе игрок делает выбор в зависимости от конкретной ситуации. Однако в принципе, возможно, что все решения приняты игроком заранее (в ответ на любую сложившуюся ситуацию). Это означает, что игрок выбрал определенную стратегию, которая может быть задана в виде списка правил или программы. (Так можно осуществить игру с помощью ЭВМ). Игра называется **конечной**, если у каждого игрока имеется конечное число стратегий, и **бесконечной** — в противном случае.

Для того чтобы ***решить*** игру, или найти решение игры, следует для каждого игрока выбрать стратегию, которая удовлетворяет условию ***оптимальности***, т.е. один из игроков должен получать ***максимальный выигрыш***, когда второй придерживается своей стратегии. В то же время второй игрок должен иметь ***минимальный проигрыш***, если первый придерживается своей стратегии. Такие ***стратегии*** называются ***оптимальными***. Оптимальные стратегии должны также удовлетворять ***условию устойчивости***, т.е. любому из игроков должно быть невыгодно отказаться от своей стратегии в этой игре.

Если ***игра повторяется достаточно много раз***, то игроков может интересовать не выигрыш и проигрыш в каждой конкретной партии, а ***средний выигрыш (проигрыш) во всех партиях***.

**Целью** теории игр является ***определение оптимальной стратегии для каждого игрока***. При выборе оптимальной стратегии естественно предполагать, что оба игрока ведут себя разумно с точки зрения своих интересов.   
Важнейшее **ограничение** теории игр — ***единственность выигрыша*** как показателя эффективности, в то время как в большинстве реальных экономических задач имеется более одного показателя эффективности. Кроме того, в экономике, как правило, возникают задачи, в которых интересы партнеров не обязательно антагонистические.

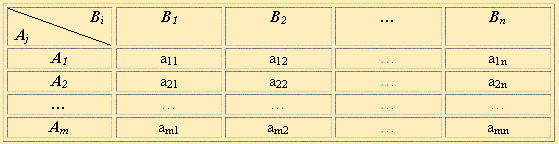
**Платежная матрица. Нижняя и верхняя   
цена игры.**

Рассмотрим парную конечную игру. Пусть игрок ***А*** располагает ***m*** личными стратегиями, которые обозначим ***A1***, ***A2***, ..., ***Am***. Пусть у игрока ***В*** имеется ***n*** личных стратегий, обозначим их ***B1***, ***B2***, ..., ***Bm***. Говорят, что игра имеет размерность ***m × n***. В результате выбора игроками любой пары стратегий

***Ai и Bj (i = 1, 2, ..., m; j = 1, 2, ..., n)***

однозначно определяется исход игры, т.е. выигрыш ***aij*** игрока ***А*** (положительный или отрицательный) и проигрыш (***- aij*** ) игрока ***В***. Предположим, что значения ***о,у*** известны для любой пары стратегий ***(Ai ,Bj*** ). Матрица ***P = (aij ), i = 1, 2, ..., m; j = 1, 2, ..., n***, элементами которой являются выигрыши, соответствующие стратегиям ***Ai*** и ***Bj***, называется **платежной матрицей** или **матрицей игры**. Общий вид такой матрицы представлен в таблице 3.1.

**Таблица 3.1**



Строки этой таблицы соответствуют стратегиям игрока ***А***, а столбцы — стратегиям игрока ***В***. Составим платежную матрицу для следующей игры.

**Пример 3.2.1.**

Игра «поиск»

Игрок ***А*** может спрятаться в одном из двух убежищ (**I** и **II**); игрок ***В*** ищет игрока ***А***, и если найдет, то получает штраф **1** ден. ед. от ***А***, в противном случае платит игроку ***А*** **1** ден. ед. Необходимо построить платежную матрицу игры.

**Решение.** Для составления платежной матрицы следует проанализировать поведение каждого из игроков. Игрок ***А*** может спрятаться в убежище **I** – обозначим эту стратегию через ***A1*** или в убежище **II** — стратегия ***A2*** .

Игрок ***В*** может искать первого игрока в убежище **I** — стратегия ***B1***, либо в убежище **II** — стратегия ***B2***. Если игрок ***А*** находится в убежище **I** и там его обнаруживает игрок ***В***, т.е. осуществляется пара стратегий (***A1***, ***B1***), то игрок ***А*** платит штраф, т.е. ***a11 = - 1***. Аналогично получаем ***a22 = - 1*** (***A2***, ***B2***). Очевидно, что стратегии (***A1***, ***B2***) и (***A2***, ***B1***) дают игроку ***А*** выигрыш **1**, поэтому ***a12 = a21 = 1***. Таким образом, для игры "поиск" размера ***2×2*** получаем платежную матрицу

http://matmetod-popova.narod.ru/theme32/example_3_2_1.GIF

Рассмотрим игру ***m × n*** с матрицей ***P = (aij ), i = 1, 2, ..., m; j = 1, 2, ..., n*** и определим наилучшую среди стратегий ***A1***, ***A2***, ..., ***Am***. Выбирая стратегию ***Ai*** игрок ***А*** должен рассчитывать, что игрок ***В*** ответит на нее той из стратегий ***Bj*** , для которой выигрыш для игрока ***А*** минимален (игрок ***В*** стремится "навредить" игроку ***А***). Обозначим через ***αi*** , наименьший выигрыш игрока ***А*** при выборе им стратегии ***Ai*** для всех возможных стратегий игрока ***В*** (наименьшее число в *i*-й строке платежной матрицы), т.е.

|  |  |
| --- | --- |
| http://matmetod-popova.narod.ru/theme32/example_3_2_2.GIF | (3.1) |

Среди всех чисел ***αi (i = 1, 2, ..., m)*** выберем наибольшее: . Назовем ***α*** **нижней ценой игры**, или **максимальным выигрышем** (**максимином**). Это гарантированный выигрыш игрока ***А*** при любой стратегии игрока ***В***. Следовательно,

|  |  |
| --- | --- |
| http://matmetod-popova.narod.ru/theme32/example_3_2_3.GIF | (3.2) |

Стратегия, соответствующая максимину, называется **максиминной стратегией**. Игрок ***В*** заинтересован в том, чтобы уменьшить выигрыш игрока ***А***; выбирая стратегию ***Bj*** , он учитывает максимально возможный при этом выигрыш для ***А***. Обозначим

|  |  |
| --- | --- |
| http://matmetod-popova.narod.ru/theme32/example_3_2_4.GIF | (3.3) |

Среди всех чисел ***Bj*** ; выберем наименьшее и назовем ***β*** **верхней ценой игры** или **минимаксным выигрышем** (**минимаксом**). Это гарантированный проигрыш игрока ***В***. Следовательно,

|  |  |
| --- | --- |
| http://matmetod-popova.narod.ru/theme32/example_3_2_6.GIF | (3.4) |

Стратегия, соответствующая минимаксу, называется минимаксной стратегией. Принцип, диктующий игрокам выбор наиболее "осторожных" минимаксной и максиминной стратегий, называется **принципом минимакса**. Этот принцип следует из разумного предположения, что каждый игрок стремится достичь цели, противоположной цели противника. Определим нижнюю и верхнюю цены игры и соответствующие стратегии в задаче. Рассмотрим платежную матрицу

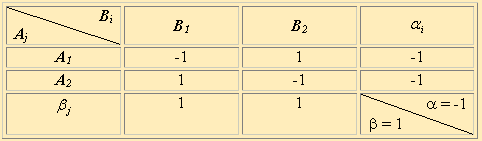
http://matmetod-popova.narod.ru/theme32/example_3_2_1.GIF

из примера 3.2.1. При выборе стратегии ***A1*** (первая строка матрицы) минимальный выигрыш равен ***α1 = min (-1;1) = -1*** и соответствует стратегии ***β1***, игрока ***В***. При выборе стратегии ***A2*** (вторая строка матрицы) минимальный выигрыш равен ***α2 = min (1;-1) = -1***, он достигается при стратегии ***B2***.

Гарантируя себе максимальный выигрыш при любой стратегии игрока ***В***, т.е. нижнюю цену игры ***α = max (α1 ;α2 ) = max (-1;-1) = -1*** игрок ***А*** может выбирать любую стратегию: ***A1*** или ***A2***, т.е. любая его стратегия является максиминной.   
Выбирая стратегию ***B1*** (столбец **I**), игрок ***В*** понимает, что игрок ***А*** ответит стратегией ***A2***, чтобы максимизировать свой выигрыш (проигрыш ***В***). Следовательно, максимальный проигрыш игрока ***В*** при выборе им стратегии ***B1*** равен ***β1 = max (-1;-1)****.*Аналогично максимальный проигрыш игрока ***В*** (выигрыш ***А***) при выборе им стратегии ***B2*** (столбец ***2***) равен ***β2 = max (1;-1) = 1****.*Таким образом, при любой стратегии игрока ***А*** гарантированный минимальный проигрыш игрока ***В*** равен ***β2 = min (β1;β2)*** — верхней цене игры.

Любая стратегия игрока ***В*** является минимаксной. Дополнив таблицу 3.1 строкой ***β j*** и столбцом ***αi***, получим таблицы 3.2. На пересечении дополнительных строки и столбца будем записывать верхнюю и нижнюю цены игр.

**Таблица 3.2**



В примере 3.2.1, рассмотренном выше, верхняя и нижняя цены игры различны: ***α***≠ ***β***.

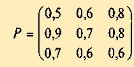
Если верхняя и нижняя цены игры совпадают, то общее значение верхней и нижней цены игры ***α = β = v*** называется ***чистой ценой игры***, или ***ценой игры***. Минимаксные стратегии, соответствующие цене игры, являются **оптимальными стратегиями**, а их совокупность — ***оптимальным решением***, или **решением игры**. В этом случае игрок ***А*** получает максимальный гарантированный (не зависящий от поведения игрока ***В***) выигрыш ***v***, а игрок ***В*** добивается минимального гарантированного (вне зависимости от поведения игрока ***А***) проигрыша ***v***. Говорят, что решение игры обладает ***устойчивостью***, т.е. если один из игроков придерживается своей оптимальной стратегии, то для другого не может быть выгодным отклоняться от своей оптимальной стратегии.

Пара чистых стратегий ***Ai*** и ***Bj*** дает оптимальное решение игры тогда и только тогда, когда соответствующий ей элемент ***aij*** , является одновременно наибольшим в своем столбце и наименьшим в своей строке. Такая ситуация, если она существует, называется ***седловой точкой*** (по аналогии с поверхностью седла, которая искривляется вверх в одном направлении и вниз — в другом).

Обозначим ***А\**** и ***В\**** — пару чистых стратегий, на которых достигается решение игры в задаче с седловой точкой. Введем функцию выигрыша первого игрока на каждой паре стратегий: ***P (Ai***, ***Bj*** ***) = aij*** .Тогда из условия оптимальности в седловой точке выполняется двойное неравенство: ***P (Ai***, ***B\**** ***) ≤ P (A\****, ***B\**** ***)*** ***≤*** ***P (A\****, ***Bj*** ***)***, которое справедливо для всех ***i = 1, ..., m; j = 1, ..., n***. Действительно, выбор стратегии ***А\**** первым игроком при оптимальной стратегии ***В\**** второго игрока максимизирует минимальный возможный выигрыш: ***P (A\****, ***B\**** ***) ≥ P (Ai***, ***B\**** ***)***, а выбор стратегии ***В\**** вторым игроком при оптимальной стратегии первого минимизирует максимальный проигрыш: ***P (A\****, ***B\**** ***) ≤ P (A\****, ***Bj*** ***).***

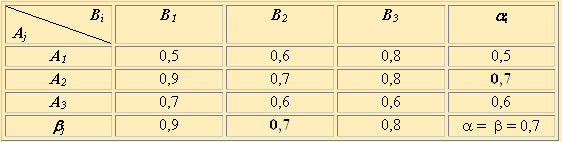
***Пример 3.2.2***

Определить нижнюю и верхнюю цену игры, заданной платежной матрицей



Имеет ли игра седловую точку?

**Таблица 3.3**



**Решение.** Все расчеты удобно проводить в таблице, к которой, кроме матрицы ***Р***, введены столбец ***αi***, и строка ***β j*** (таблица 3.3). Анализируя строки матрицы (стратегии игрока ***А***), заполняем столбец ***αi***: ***α1 = 0,5, α2 = 0,7, α3= 0,6*** — минимальные числа в строках **1**, **2**, **3**. Аналогично ***βi***: ***β1 = 0,9, β2 = 0,7, β3= 0,8*** — максимальные числа в столбцах **1**, **2**, **3** соответственно.

***Нижняя цена игры*** http://matmetod-popova.narod.ru/theme32/example_3_2_8.GIF(наибольшее число в столбце) и ***верхняя цена игры*** http://matmetod-popova.narod.ru/theme32/example_3_2_9.GIF(наименьшее число в строке ***βi*** ). Эти значения равны, т.е. ***α = β***, и достигаются на одной и той же паре стратегий (***A2***, ***B2***). Следовательно, игра имеет седловую точку (***A2***, ***B2*** ) и цена игры ***v = 0,7***.

**Решение игр в смешанных стратегиях.**

Если игра не имеет седловой точки, то применение чистых стратегий не дает оптимального решения игры. Так, в примере 3.2.1 ***α ≠ β***, седловая точка отсутствует. В таком случае можно получить оптимальное решение, случайным образом чередуя чистые стратегии.

**Смешанной стратегией** ***SA*** игрока ***А*** называется применение чистых стратегий ***A1***, ***A2***, ..., ***Am*** с вероятностями ***p1***, ***p2***, ..., ***pi***, ..., ***pm*** причем сумма вероятностей равна 1: http://matmetod-popova.narod.ru/theme33/example_3_3_1.GIFСмешанные стратегии игрока ***А*** записываются в виде матрицы

http://matmetod-popova.narod.ru/theme33/example_3_3_2.GIF

или в виде строки ***SA*** = (***p1***, ***p2***, ..., ***pi***, ..., ***pm***) Аналогично смешанные стратегии игрока ***В*** обозначаются:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| http://matmetod-popova.narod.ru/theme33/example_3_3_3.GIF | , или, | ***SB*** = (***q1***, ***q2***, ..., ***qi***, ..., ***qn***), |

где сумма вероятностей появления стратегий равна 1: http://matmetod-popova.narod.ru/theme33/example_3_3_4.GIF

Чистые стратегии можно считать частным случаем смешанных и задавать строкой, в которой **1** соответствует чистой стратегии. На основании принципа минимакса определяется **оптимальное решение** (или **решение**) игры: это пара оптимальных стратегий ***S\*A*** ***, S\*B*** в общем случае смешанных, обладающих следующим свойством: если один из игроков придерживается своей оптимальной стратегии, то другому не может быть выгодно отступать от своей. Выигрыш, соответствующий оптимальному решению, называется **ценой игры** ***v***. Цена игры удовлетворяет неравенству:

|  |  |
| --- | --- |
| ***α ≤ v ≤ β*** | (3.5) |

где ***α*** и ***β*** — нижняя и верхняя цены игры. Справедлива следующая основная теорема теории игр — теорема ***Неймана***. *Каждая конечная игра имеет по крайней мере одно оптимальное решение, возможно, среди смешанных стратегий*. Пусть ***S\*A*** = (***p\*1***, ***p\*2***, ..., ***p\*i***, ..., ***p\*m***) и ***S\*B*** = (***q\*1***, ***q\*2***, ..., ***q\*i***, ..., ***q\*n***) — пара оптимальных стратегий. Если чистая стратегия входит в оптимальную смешанную стратегию с отличной от нуля вероятностью, то она называется **активной**.

Справедлива **теорема** об активных стратегиях: *если один из игроков придерживается своей оптимальной смешанной стратегии, то выигрыш остается неизменным и равным цене игры* ***v****, если второй игрок не выходит за пределы своих активных стратегий*.

Эта теорема имеет большое ***практическое значение*** — она дает конкретные модели нахождения оптимальных стратегий при отсутствии седловой точки.

Рассмотрим **игру размера** ***2×2***, которая является простейшим случаем конечной игры. Если такая игра имеет седловую точку, то оптимальное решение — это пара чистых стратегий, соответствующих этой точке.   
Игра, в которой отсутствует седловая точка, в соответствии с основной теоремой теории игр *оптимальное решение существует и определяется парой смешанных стратегий* ***S\*A*** = (***p\*1***, ***p\*2***) и ***S\*B*** = (***q\*1***, ***q\*2***).

Для того чтобы их найти, воспользуемся теоремой об активных стратегиях. Если игрок ***А*** придерживается своей оптимальной стратегии ***S'A***, то его средний выигрыш будет равен цене игры **v**, какой бы активной стратегией ни пользовался игрок ***В***. Для игры ***2×2*** любая чистая стратегия противника является активной, если отсутствует седловая точка. Выигрыш игрока ***А*** (проигрыш игрока ***В***) — случайная величина, математическое ожидание (среднее значение) которой является ценой игры. Поэтому средний выигрыш игрока ***А*** (оптимальная стратегия) будет равен ***v*** и для **1**-й, и для **2**-й стратегии противника.

Пусть игра задана платежной матрицей

http://matmetod-popova.narod.ru/theme33/example_3_3_5.GIF

Средний выигрыш игрока ***А***, если он использует оптимальную смешанную стратегию http://matmetod-popova.narod.ru/theme33/example_3_3_6.GIF, а игрок ***В*** — чистую стратегию ***B1*** (это соответствует **1**-му столбцу платежной матрицы ***Р***), равен цене игры ***v***: ***a11 p\*1+ a21 p\*2= v***. Тот же средний выигрыш получает игрок ***А***, если **2**-й игрок применяет стратегию ***B2***, т.е. ***a12 p\*1+ a22 p\*2= v***. Учитывая, что ***p\*1+ p\*2= 1***, получаем систему уравнений для определения оптимальной стратегии ***S'A*** и цены игры ***v***:

|  |  |
| --- | --- |
| *http://matmetod-popova.narod.ru/theme33/example_3_3_7.GIF* | (3.6) |

Решая эту систему, получим оптимальную стратегию

|  |  |
| --- | --- |
| *http://matmetod-popova.narod.ru/theme33/example_3_3_8.GIF* | (3.7) |

и цену игры

|  |  |
| --- | --- |
| *http://matmetod-popova.narod.ru/theme33/example_3_3_9.GIF* | (3.8) |

Применяя теорему об активных стратегиях при отыскании SВ\*- оптимальной стратегии игрока В, получаем, что при любой чистой стратегии игрока А (А1 или А2) средний проигрыш игрока В равен цене игры v, т.е.

|  |  |
| --- | --- |
| *http://matmetod-popova.narod.ru/theme33/example_3_3_10.GIF* | (3.9) |

Тогда оптимальная стратегия определяется формулами:

|  |  |
| --- | --- |
| *http://matmetod-popova.narod.ru/theme33/example_3_3_11.GIF* | (3.10) |

Применим полученные результаты для отыскания оптимальных стратегий для игры, рассмотренной в примере 3.2.1.

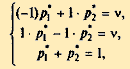
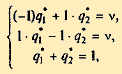
**Пример 3.3.1.**

Найти оптимальные стратегии игры, приведенной в ***примере 3.2.1***.

**Решение**. Игра "поиск" задана платежной матрицей без седловой точки:

http://matmetod-popova.narod.ru/theme33/example_3_3_12.GIF

Поэтому ищем решение в смешанных стратегиях; для игрока ***А*** средний выигрыш равен цене игры ***v*** (при ***B1*** и ***B2***); для игрока ***В*** средний проигрыш равен цене игры ***v*** (при ***A1*** и ***B2***). Системы уравнений в данном случае имеют вид:

Решая эти системы, получаем http://matmetod-popova.narod.ru/theme33/example_3_3_15.GIF

Это означает, что оптимальная стратегия каждого игрока состоит в том, чтобы чередовать свои чистые стратегии случайным образом, выбирая каждое из убежищ с вероятностью ***1/2***, при этом средний выигрыш равен ***0***.

**Геометрическая интерпретация игры 2×2.**

Решение игры ***2×2*** допускает наглядную геометрическую интерпретацию. Пусть игра задана платежной матрицей ***Р = (aij), i, j = 1, 2***. По оси абсцисс (рис. 3.1) отложим единичный отрезок ***A1 A2*** точка ***A1(х=0)*** изображает стратегию ***A1***, а все промежуточные точки этого отрезка — смешанные стратегии ***SA*** первого игрока, причем расстояние от ***SA*** до правого конца отрезка — это вероятность ***p1*** стратегии ***A1***, расстояние до левого конца — вероятность ***p2*** стратегии ***A2***. На перпендикулярных осях **I**—**I** и **II**—**II** откладываем выигрыши при стратегиях ***A1*** и ***A2*** соответственно. Если **2**-й игрок примет стратегию ***B1***, то она дает выигрыши ***a11*** и ***a21*** на осях **I**—**I** и **II**—**II**, соответствующие стратегиям ***A1*** и ***A2***. Обозначим эти точки на осях **I—I** и **II—II** буквой ***B1***. Средний выигрыш ***v1***, соответствующий смешанной стратегии ***SA***, определяется по формуле математического ожидания ***v1*** = ***a11 p1*** + ***a21 p2*** и равен ординате точки ***M1***, которая лежит на отрезке ***B1 B1*** и имеет абсциссу ***SA*** (рис. 3.1).

|  |  |
| --- | --- |
| http://matmetod-popova.narod.ru/theme34/picture_3_4_1.GIF | http://matmetod-popova.narod.ru/theme34/picture_3_4_2.GIF |
| Рис. 3.1 | Рис. 3.2 |

Аналогично строим отрезок ***B2B2***, соответствующий применению вторым игроком стратегии ***B2*** (Рис. 3.2). При этом средний выигрыш ***v2*** = ***a12 p1*** + ***a22 p2*** — ордината точки ***M2***.   
В соответствии с принципом минимакса оптимальная стратегия ***S\*A*** такова, что минимальный выигрыш игрока ***А*** (при наихудшем поведении игрока ***В)*** обращается в максимум. Ординаты точек, лежащих на ломаной (рис. 3.3 в примере 3.4.1), показывают минимальный выигрыш игрока ***А*** при использовании им любой смешанной стратегии (на участке ***B1 N*** — против стратегии ***B1*** , на участке ***NB2*** — против стратегии ***B2***). Оптимальную стратегию ***S\*A*** = ***( p\*1***, ***p\*2 )*** определяет точка ***N***, в которой минимальный выигрыш достигает максимума; ее ордината равна цене игры ***v***. На рис. 3.3 (пример 3.4.1) обозначены также верхняя и нижняя цены игры ***α*** и ***β***. Применим геометрический метод для решения следующего примера.

**Пример 3.4.1.**

Решить графически игру, заданную платежной матрицей

http://matmetod-popova.narod.ru/theme34/example_3_4_1.GIF

|  |  |
| --- | --- |
| http://matmetod-popova.narod.ru/theme34/picture_3_4_3.GIF | http://matmetod-popova.narod.ru/theme34/picture_3_4_4.GIF |
| Рис. 3.3 | Рис. 3.4 |

**Решение**. Откладываем по оси абсцисс (рис. 3.4) единичный отрезок ***A1A2***. На вертикальной оси **I—I** откладываем отрезки: ***a11  = 1,5***, соответствующий стратегии ***B1*** , и ***a12 = 3***, соответствующий стратегии ***B2***. На вертикальной оси **II—II** отрезок ***a21 = 2*** соответствует стратегии ***B1*** , отрезок ***a22 = 1*** соответствует стратегии ***B2*** (см. рис. 3.4). Нижняя цена игры ***α = a11 = 1,5***. Верхняя цена игры ***β = a21 = 2***, седловая точка отсутствует. Из рис. 3.4 видно, что абсцисса точки ***N*** определяет оптимальную стратегию ***S\*A*** , а ордината — цену игры ***v***. Точка ***N*** является точкой пересечения прямых ***B1B1*** и ***B2B2***. Уравнение прямой ***B1B1***, проходящей через точки ***(0; 1,5)*** и ***(1; 2)***: http://matmetod-popova.narod.ru/theme34/example_3_4_2.GIFили ***y = 0,5x + 1,5***. Уравнение прямой ***B2B2***, проходящей через точки ***(0; 3)*** и ***(1;1)***: http://matmetod-popova.narod.ru/theme34/example_3_4_3.GIFили ***y = 2x + 3***.

Точка пересечения прямых является решением системы:

http://matmetod-popova.narod.ru/theme34/example_3_4_4.GIFили ***x = 0,6***; ***y = 1,8***, т.е. ***N(0,6;1,8)***

Таким образом, ***p\*1= 0,6***, ***p\*2= 1 - 0,6 = 0,4***; оптимальная стратегия ***S\*A = (0,6;0,4)***, цена игры ***v = 1,8***.   
Геометрически можно также определить оптимальную стратегию игрока ***В***, если поменять местами игроков ***А*** и ***В*** и вместо максимума нижней границы *A2*M*A1* в соответствии с принципом минимакса рассмотреть минимум верхней границы.

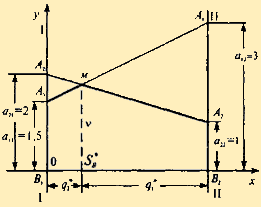


Рис. 3.5

Абсцисса точки ***М*** определяет ***q\*2*** в оптимальной стратегии игрока ***В***, ордината этой точки — цена игры. Прямая ***A1A1*** , проходящая через точки ***(0; 1,5)*** и ***(1; 3)***, удовлетворяет уравнению ***y = 1,5x + 1,5***.

Прямая ***A2A2*** , проходящая через точки ***(0; 2)*** и ***(1; 1)***, удовлетворяет уравнению ***у = - х +2***. Координаты их точки пересечения ***М*** — это решение системы уравнений:

http://matmetod-popova.narod.ru/theme34/example_3_4_5.GIF

откуда ***x = 0,2***; ***y = 1,8***, ***q\*2= 0,2***, ***q\*1= 1 - q\*2 = 0,8, x = y = 1,8, S\*B = (0,8;0,2)***

Оптимальное решение игры найдено.

|  |  |
| --- | --- |
| http://matmetod-popova.narod.ru/theme34/picture_3_4_6.GIF | http://matmetod-popova.narod.ru/theme34/picture3_4_7.GIF |
| Рис. 3.6 | Рис. 3.7 |

Из решения ***примера 3.4.1*** следует, что геометрически можно определять оптимальную стратегию как игрока ***А***, так и игрока ***В***, в обоих случаях используется принцип минимакса, но во втором случае строится не нижняя, а верхняя граница выигрыша и на ней определяется не максимум, а минимум.

Если платежная матрица содержит отрицательные числа, то для графического решения задачи лучше перейти к новой матрице с неотрицательными элементами; для этого к элементам исходной матрицы достаточно добавить соответствующее положительное число. Решение игры при этом не изменится, а цена игры увеличится на это число. В ***примере 3.4.1*** платежная матрица не имела седловой точки (***α ≠β*** ).

При наличии седловой точки графическое решение дают варианты, изображенные на рис. 3.6 и 3.7. На рис. 3.6 наибольшей ординатой на ломаной ***B1*** ***NB2*** обладает точка ***B2***, поэтому оптимальной является чистая стратегия ***A2*** для игрока ***А*** (***B2*** — для игрока ***В***), т.е. оптимальное решение: ***S\*A = (0;1), S\*B = (0;1)***. Игра имеет седловую точку ***a22 = v***.

Чистая стратегия ***B2*** (рис. 3.7) не выгодна для игрока ***В***, поскольку при любой стратегии игрока ***А*** она дает последнему больший выигрыш, чем чистая стратегия ***B1***. На основании принципа минимакса выделим прямую ***B1B1*** и на ней точку ***B1*** с наибольшей ординатой на оси **I—I**. Чистая стратегия ***A2*** является оптимальной для игрока ***А***, а чистая стратегия ***B1*** — для игрока ***В***. Оптимальное решение: ***S\*A = (0;1), S\*B = (1;0)***, цена игры ***v*** = ***a21 = α = β*** , т.е. имеется седловая точка.

Графический метод можно применять при решении игры ***2 × n*** и ***m × 2***.

**Приведение матричной игры к задаче линейного программирования.**

Игра ***m × n*** в общем случае не имеет наглядной геометрической интерпретации. Ее решение достаточно трудоемко при больших ***m*** и ***n***, однако принципиальных трудностей не имеет, поскольку может быть сведено к решению задачи линейного программирования. Покажем это. Пусть игра ***m × n*** задана платежной матрицей ***p = (aij ), i = 1, 2, ..., m; j = 1, 2, ..., n***. Игрок ***А*** обладает стратегиями ***A1 , A2 , ..., Am*** , игрок ***В*** — стратегиями ***B1 , B2 , ..., Bm*** . Необходимо определить оптимальные стратегии ***S\*A = ( p\*1,  p\*2 , ...,  p\*m )*** и ***S\*B = ( q\*1, q\*2 , ...,  q\*n )***, где ***p\*i***, ***q\*j*** — вероятности применения соответствующих чистых стратегий ***Ai*** , ***Bj***, ***p\*1 + p\*2 +...+ p\*m =1***, ***q\*1+ q\*2 +...+ q\*n = 1.***

Оптимальная стратегия ***S\*A*** удовлетворяет следующему требованию. Она обеспечивает игроку ***А*** средний выигрыш, не меньший, чем цена игры ***v***, при любой стратегии игрока ***В*** и выигрыш, равный цене игры ***v***, при оптимальной стратегии игрока ***B***. Без ограничения общности полагаем ***v > 0***: этого можно добиться, сделав все элементы ***aij ≥ 0***. Если игрок ***А*** применяет смешанную стратегию ***S\*A = ( p\*1,  p\*2 , ...,  p\*m )*** против любой чистой стратегии ***Bj*** игрока ***В***, то он получает **средний выигрыш**, или **математическое ожидание выигрыша** ***aj = a1j p1 + a2j p2 +...+ am j pm , о = 1, 2, ..., n*** (т.е. элементы *j*-го столбца платежной матрицы почленно умножаются на соответствующие вероятности стратегий ***A1 , A2 , ..., Am*** и результаты складываются).

Для оптимальной стратегии ***S\*A*** все средние выигрыши не меньше цены игры ***v***, поэтому получаем систему неравенств:

|  |  |
| --- | --- |
| http://matmetod-popova.narod.ru/theme35/example_3_5_1.GIF | (3.11) |

Каждое из неравенств можно разделить на число ***v > 0***. Введем новые переменные:

|  |  |
| --- | --- |
| ***x1 =  p1/v, x2 = p2/v , ...,  pm/v*** | (3.12) |

Тогда система (11) примет вид:

|  |  |
| --- | --- |
| http://matmetod-popova.narod.ru/theme35/example_3_5_2.GIF | (3.13) |

**Цель** игрока ***А*** — максимизировать свой гарантированный выигрыш, т.е. цену игры ***v***.   
Разделив на ***v ≠ 0*** равенство ***p1 + p2 + ...+ pm = 1*** , получаем, что переменные ***x1 (i = 1, 2, ..., m)*** удовлетворяют условию: ***x1 + x2 + ...+ xm = 1/v***. Максимизация цены игры ***v*** эквивалентна минимизации величины ***1/v***, поэтому задача может быть сформулирована следующим образом: *определить значения переменных* ***xi ≥ 0, i = 1, 2, ..., m****, так, чтобы они удовлетворяли линейным ограничениям (13) и при этом линейная функция*

|  |  |
| --- | --- |
| ***Z = x1 + x2 + ...+ xm,*** | (3.14) |

*обращалась в миниму*м. Это задача линейного программирования. Решая задачу (3.13)—(3.14), получаем оптимальное решение ***p\*1 + p\*2 + ...+ p\*m*** и оптимальную стратегию ***SA*** .   
Для определения оптимальной стратегии ***S\*B*** = (***q\*1 + q\*2 + ...+ q\*n***) следует учесть, что игрок ***В*** стремится минимизировать гарантированный выигрыш, т.е. найти http://matmetod-popova.narod.ru/theme35/example_3_5_36.GIF. Переменные ***q1, q2 , ..., qn*** удовлетворяют неравенствам:

|  |  |
| --- | --- |
| http://matmetod-popova.narod.ru/theme35/example_3_5_3.GIF | (3.15) |

которые следуют из того, что средний проигрыш игрока ***В*** не превосходит цены игры, какую бы чистую стратегию не применял, игрок ***А***.   
Если обозначить

|  |  |
| --- | --- |
| ***yj =  qj/v, j = 1, 2, ..., n,*** | (3.16) |

то получим систему неравенств:

|  |  |
| --- | --- |
| http://matmetod-popova.narod.ru/theme35/example_3_5_4.GIF | (3.17) |

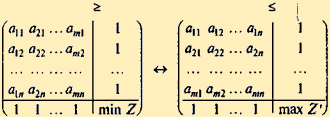
Переменные ***yj (1, 2, ..., n)*** удовлетворяют условию http://matmetod-popova.narod.ru/theme35/example_3_5_37.GIF.   
Игра свелась к следующей задаче   
Определить значения переменных ***yj ≥ 0, j = 1, 2, ..., n,***которые удовлетворяют системе неравенств (3.17) и максимизируют линейную функцию

|  |  |
| --- | --- |
| ***Z' = y1 + y2 + ...+ yn,*** | (3.18) |

Решение задачи линейного программирования (3.16), (3.17) определяет оптимальную стратегию ***S\*B*** = (***q\*1 + q\*2 + ...+ q\*n***) . При этом цена игры

|  |  |
| --- | --- |
| ***v =  1 / max, Z' = 1 / min Z*** | (3.19) |

Составив расширенные матрицы для задач (3.13), (3.14) и (3.17), (3.18), убеждаемся, что одна матрица получилась из другой транспонированием:



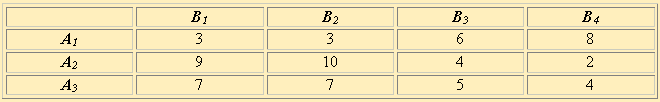
Таким образом, задачи линейного программирования (3.13), (3.14) и (3.17), (3.18) являются взаимно-двойственными. Очевидно, при определении оптимальных стратегий в конкретных задачах следует выбрать ту из взаимно-двойственных задач, решение которой менее трудоемко, а решение другой задачи найти с помощью теорем двойственности. Приведем примеры экономических задач, которые описываются игровыми моделями т х п и могут быть решены методами линейного программирования.

**Пример 3.5.1.**

Предприятие может выпускать три вида продукции (***A1 , A2*** и ***A3*** ), получая при этом прибыль, зависящую от спроса, который может быть в одном из четырех состояний ***(B1 , B2, B3, B4 )***. Дана матрица (табл. 3.4), ее элементы ***aij*** характеризуют прибыль, которую получит предприятие при выпуске *i*-и продукции с *j*-м состоянием спроса. Определить оптимальные пропорции в выпускаемой продукции, гарантирующие среднюю величину прибыли при любом состоянии спроса, считая его неопределенным.

**Решение**. Задача сводится к игровой модели, в которой игра предприятия ***А*** против спроса ***В*** задана платежной матрицей (см. табл. 3.4).   
Прежде чем решать задачу, можно попытаться упростить игру, проведя анализ платежной матрицы и отбросив стратегии, заведомо невыгодные или дублирующие. Так, вторая стратегия (второй столбец матрицы (см. табл. 3.4))

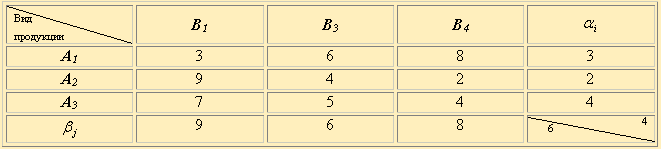
**Таблица 3.4**



является явно невыгодной для игрока ***В*** по сравнению с первой (элементы второго столбца больше элементов первого столбца), так как цель игрока ***В*** — уменьшить выигрыш игрока ***А***. Поэтому второй столбец можно отбросить. Получим матрицу размера ***3×3***:



**Таблица 3.5**

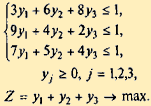
****

Определим нижнюю и верхнюю цены игры в табл. 3.5. Так как ***α ≠ β***, то седловая точка отсутствует и оптимальное решение следует искать в смешанных стратегиях игроков:

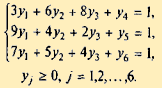
***S\*A = ( p\*1,  p\*2 , p\*3 )*** и ***S\*B = ( q\*1, q\*2 , q\*3 )***

Обозначив ***xi =  pi/v, i = 1, 2, 3*** и ***yj = qj/v , j = 1, 2, 3***, составим две взаимно-двойственные задачи линейного программирования (см. (3.13)-(3.14) и (3.17)-(3.18)).

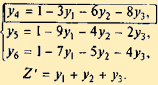
**Пример 3.5.2.**



Решаем задачу симплексным методом поскольку для нее первое базисное решение будет допустимым. Введем добавочные переменные и перейдем к уравнениям:

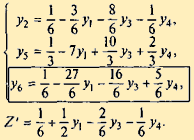


**I шаг.** Основные переменные — ***y4 , y5 , y6***; неосновные переменные — ***y1 , y2 , y3***



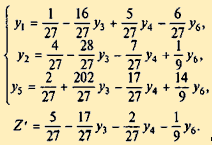
Базисное решение ***Y1 = (0;0;0;1;1;1)*** допустимое; переводим ***y2*** в основные;переводим ***y4*** в неосновные переменные.

**II шаг.** Основные переменные — ***y2 , y5 , y6***; неосновные переменные — ***y1 , y3 , y4.***  
Получим после преобразований:



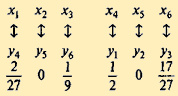
Базисное решение: http://matmetod-popova.narod.ru/theme35/example_3_5_11.GIF. Переводим ***y4*** в основные; http://matmetod-popova.narod.ru/theme35/example_3_5_12.GIF. Переводим ***y6*** в неосновные переменные.

**Ill шаг.** Основные переменные — ***y1 , y2 , y2***; неосновные пе- ременные — ***y3 , y4 , y6***.

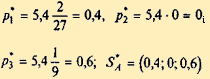


Базисное решение http://matmetod-popova.narod.ru/theme35/example_3_5_14.GIF  
Так как отсутствуют положительные коэффициенты при неосновных переменных, то критерий оптимальности выполнен,http://matmetod-popova.narod.ru/theme35/example_3_5_15.GIF и базисное решение ***Y3 = (1/27;4/27;0;0;2/27;0)*** является оптимальным.

Установим соответствие между переменными взаимно-двойственных задач и определим оптимальное базисное решение задачи **6** с помощью теорем двойственности:



Оптимальное базисное решение: ***(2/27; 0; 1/9; 1/2; 0; 17/27)***, причем ***min Z = max Z' = 5/27***. Из соотношений (3.19) находим цену игры http://matmetod-popova.narod.ru/theme35/example_3_5_17.GIFОптимальную стратегию ***S\*A = ( p\*1,  p\*2 , p\*3 )*** находим, используя (3.12):   
***p\*i= x1v, i = 1, 2, 3,*** т.е.



Следовательно, предприятие должно выпустить **40%** продукции ***A1*** и **60%** продукции ***A3***, а продукцию ***A2*** не выпускать. Оптимальная стратегия спроса ***S\*B***  определяется аналогично: ***q\*j = vyj, j = 1, 2, 3,*** т.е. ***S\*B = (0,2;0;0,8;0)*** (здесь учтено, что второй столбец исходной матрицы был отброшен как невыгодный). Таким образом, оптимальный спрос в **20%** находится в состоянии ***B1*** и в **80%** — в состоянии ***B3***

При решении произвольной конечной игры размера ***m × n*** рекомендуется придерживаться следующей схемы:

1. Исключить из платежной матрицы заведомо невыгодные стратегии по сравнению с другими стратегиями. Такими стратегиями для игрока ***А*** (игрока ***В***) являются те, которым соответствуют строки (столбцы) с элементами, заведомо меньшими (большими) по сравнению с элементами других строк (столбцов).
2. Определить верхнюю и нижнюю цены игры и проверить, имеет ли игра седловую точку. Если седловая точка есть, то соответствующие ей стратегии игроков будут оптимальными, а цена совпадает с верхней (нижней) ценой.
3. Если седловая точка отсутствует, то решение следует искать в смешанных стратегиях. Для игр размера ***m × n*** рекомендуется симплексный метод, для игр размера ***2×2***, ***2×n***, ***n×2*** возможно геометрическое решение.

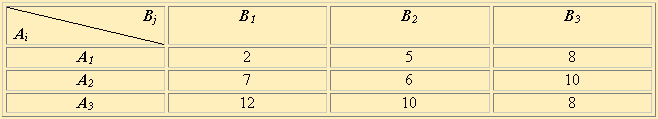
На практике реализация оптимального решения http://matmetod-popova.narod.ru/theme35/example_3_5_19.GIFв смешанных стратегиях может происходить несколькими путями. Первый состоит в физическом смешении чистых стратегий ***Ai*** - в пропорциях, заданных вероятностями ***pi***.   
Другой путь — при многократном повторении игры — в каждой партии чистые стратегии применяются в виде случайной последовательности, причем каждая из них — с частотой, равной ее вероятности в оптимальном решении.

Рассмотрим еще одну экономическую задачу, сводящуюся к игровой модели.

**Пример 3.5.3.**

Предприятие выпускает скоропортящуюся продукцию, которую может сразу отправить потребителю (стратегия ***A1***), отправить на склад для хранения (стратегия ***A2***) или подвергнуть дополнительной обработке (стратегия ***A3***) для длительного хранения.   
Потребитель может приобрести продукцию: немедленно (стратегия ***B1***), в течение небольшого времени (***B2***), после длительного периода времени (***B3***).   
В случае стратегий ***A2*** и ***A3***, предприятие несет дополнительные затраты на хранение и обработку продукции, которые не требуются для ***A1***, однако при ***A2*** следует учесть возможные убытки из-за порчи продукции, если потребитель выберет стратегии ***B2*** или ***B3***.   
Определить оптимальные пропорции продукции для применения стратегий ***A1***, ***A2***, ***A3*** руководствуясь "минимаксным критерием" (гарантированный средний уровень убытка) при матрице затрат, представленной табл. 3.6.

**Таблица 3.6**

****

**Решение**. Получаем игру с платежной матрицей

http://matmetod-popova.narod.ru/theme35/example_3_5_20.GIF

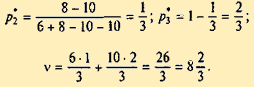
В этой матрице первую строку можно отбросить как невыгодную (ее элементы меньше соответствующих элементов второй строки). Матрица примет вид

http://matmetod-popova.narod.ru/theme35/example_3_5_21.GIF

Элементы первого столбца больше соответствующих элементов второго столбца, поэтому его можно отбросить.

Игра упростилась: http://matmetod-popova.narod.ru/theme35/example_3_5_22.GIF

По формулам (3.7) и (3.8) находим:



Вывод: оптимальная стратегия производителя продукции http://matmetod-popova.narod.ru/theme35/example_3_5_24.GIF, т.е. стратегия ***A1*** не применяется, ***1/3*** продукции отправляется на склад (стратегия ***A2***), ***2/3*** продукции дополнительно обрабатывается (стратегия ***A3***), при этом цена игры

http://matmetod-popova.narod.ru/theme35/example_3_5_25.GIF

**РЕШИТЬ ЗАДАЧУ:**

Магазин может завезти в различных пропорциях товары трех типов (А1, А2, А3); их реализация и прибыль магазина зависят от вида товара и состояния спроса. Предполагается, что спрос может иметь три состояния (В1, В2, В3) и не прогнозируется. Определить оптимальные пропорции в закупке товаров из условия максимизации средней гарантированной прибыли при следующей матрице прибыли (табл.3.7).

***Таблица 3.7.***

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| http://znanie.podelise.ru/tw_files2/urls_914/6/d-5087/7z-docs/1_html_m53d4ecad.gif | | В | | |  |
| В1 | В2 | В3 |
| А | А1 | 28 | 23 | 18 | *18* |
| А2 | 24 | 20 | 22 | *20* |
| А3 | 21 | 26 | 23 | *21* |
| А4 | 23 | 24 | 26 | *23* |
|  | | *28* | *26* | *26* |  |